电势 电势能

1. 点电荷q在空间产生的电场强度：$\vec{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\hat{r}_0$，单位矢量$\hat{r}_0$方向从点电荷$q$指向该点。

如果N个点电荷q在圆环上无规则分布，它们在轴线上同一点P产生的电场强度大小相等，$E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，但方向相对$z$轴不均匀分布，使得各点电荷的电场强度$\vec{E}$在垂直于$z$轴方向上的分量**可能不一定**刚好抵消，即$P$点总场强可能有垂直于$z$轴方向分量；各点电荷在沿$z$轴方向上的分量大小相等，$E_z=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$，$N$个点电荷在$P$点总场强的$z$轴分量：$\dfrac{Nq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$；

如果N个点电荷q在圆环上均匀分布，各点电荷在轴线上同一点P产生的电场强度大小相等，$E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，且方向相对$z$轴均匀分布，使得电场强度$\vec{E}$在垂直于$z$轴方向上的分量刚好抵消，即$P$点总场强一定没有垂直于$z$轴方向分量；各点电荷在沿$z$轴方向上的分量大小相等，$E_z=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$，则$N$个点电荷在$P$点总场强的$z$轴分量：$\dfrac{Nq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$，所以不论电荷在圆环上是无规则分布，还是均匀分布，P点总场强的z轴分量相等。

取无穷远处电势为零，$V_\infty=0$，点电荷q在空间产生的电势：$V(r)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，电势是标量，圆环上各点电荷在轴线上同一点$P$产生的电势都相等，所以不论电荷在圆环上是无规则分布，还是均匀分布，N个点电荷在P点的总电势：$V_P=\dfrac{Nq}{4\pi\varepsilon_0 r}$相等。　　　　**本题选（C）**

2. 设圆半径为r，取无穷远处电势为零，$V_\infty=0$，则点电荷$-q$在圆周上各点产生的电势相等，$V(r)=\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，

即 $V_A=V_B=V_C=V_D=\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r}$；

试验电荷q_0从A点分别移动到B、C、D点电场力做功分别为：

$W_{AB}=q_0(V_A-V_B)=0$，　$W_{AC}=q_0(V_A-V_C)=0$，$W_{AD}=q_0(V_A-V_D)=0$，

所以$W_{AB}=W_{AC}=W_{AD}=0$，从A到各点，电场力做功相等。　　　　**本题选（D）**

3. 等边三角形顶点到中心o的距离：$r=\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2=\dfrac{a}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，

若取无穷远处电势为零，$V_\infty = 0$，则**中心 o 处的电势为**：

$$U = V_q + V_{2q} + V_{3q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{6q}{4\pi\varepsilon_0 \frac{\sqrt{3}}{3}a} = \frac{3\sqrt{3}q}{2\pi\varepsilon_0 a}.$$

4. 若取无穷远处电势为零，$V_\infty = 0$，半径为 R、均匀带电 Q 的球面的电势在空间的分布：

$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} & (r \le R) \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r > R) \end{cases},$$

如果球面上电荷面密度为 σ，球面带电：$Q = \sigma \cdot 4\pi R^2$，$\Rightarrow$ **球面上的电势为**：$U = V(R) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0}$.

5. 电荷均匀分布在两个球面上，空间电场具有球对称性，求两带电球面之间 P 点的场强大小，只需在两球面之间作一半径为 r 的同心球面 S 为高斯面，包围电荷电量为 Q_1，由高斯定理：

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_1 \;\Rightarrow\; E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} Q_1 \;\Rightarrow\; \textbf{球面之间 P 点的场强大小：} E = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2};$$

求两带电球面在 P 点的电势，只需把各个带电球面单独存在时在 P 点产生的电势代数相加即可。

由于 P 点到球心的距离为 r，且 $R_1 < r < R_2$，即 P 点在球面 Q_1 外，在球面 Q_2 内。

P 点在球面 Q_1 外，则球面 Q_1 在 P 点产生的电势：$V_{Q_1P} = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}$，（取无穷远处电势为零，$V_\infty = 0$）

P 点在球面 Q_2 内，则球面 Q_2 在 P 点产生的电势：$V_{Q_2P} = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$，

所以**球面间 P 点的电势**：$V_P = V_{Q_1P} + V_{Q_2P} = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$.

6. 无限大均匀带电平板两侧电场关于平板中央平面对称。

（1）$-\dfrac{d}{2} < x < \dfrac{d}{2}$，即 $|x| < \dfrac{d}{2}$ 时，在平板内作一圆柱面 S_1 为高斯面，垂直于中央平面，且关于中央平面对称，圆柱面的底面积为 Δs，高为 $2|x|$，包围的电荷：$\rho \cdot 2|x| \cdot \Delta s$，由高斯定理：

$$\oint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \cdot 2|x| \cdot \Delta s \;\Rightarrow\; 2E\Delta s = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \cdot 2|x| \cdot \Delta s \;\Rightarrow\; E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}|x|;$$

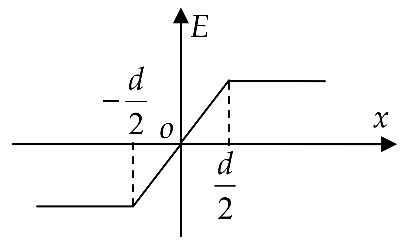
（2）$|x| > \dfrac{d}{2}$ 时，同理，在平板外作一圆柱面 S_2 为高斯面，垂直于中央平面，且关于中央平面对称，圆柱面的底面积为 Δs，高为 $2|x|$，包围的电荷：$\rho \cdot d \cdot \Delta s$，由高斯定理：

$$\oint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \cdot d \cdot \Delta s \;\Rightarrow\; 2E\Delta s = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \cdot d \cdot \Delta s \;\Rightarrow\; E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} d;$$

$\Rightarrow$ 场强大小：$E=\begin{cases}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}|x| & (|x|\le\dfrac{d}{2})\\ \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}d & (|x|>\dfrac{d}{2})\end{cases}$，

方向从中央平面指向两侧，左侧向左，右侧向右。

$E-x$ 变化曲线如图所示。



（第6题图）

7. 若取无穷远处电势为零，$V_\infty=0$，点电荷$+q$在空间的电势：$V(r)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$，

则 P 点的电势：$V_P=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}$，M 点的电势：$V_M=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 2a}$，

M 点和 P 点的电势差：$V_M-V_P=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 2a}-\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}=-\dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}$；

注意：空间某一点的电势和电势零点的选取有关，但两点之间的电势差与电势零点的选取无关！

若取 P 点的电势为零，即$V_P=0$，由电势差：$V_M-V_P=-\dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}$与电势零点的选取无关，

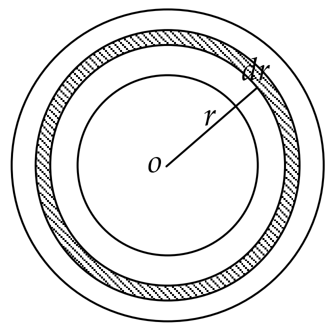
$\Rightarrow$ M 点的电势：$V_M=-\dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 a}$.

8. 在球层内取一半径为r、厚度为dr的薄球壳，体积为$dV=4\pi r^2dr$，电量为$dQ=\rho dV=\rho 4\pi r^2 dr$，该薄球壳可近似于一带电球面，显然，空腔中任一点 P 必定也在该薄球壳内部，

则薄球壳在空腔中的电势：$dV=\dfrac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$，（注意：$r$ 为薄球壳的半径）

那么，**整个带电球层在空腔中的电势**：

$$V=\int_{球层}dV=\int_{球层}\frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho 4\pi r^2 dr}{4\pi\varepsilon_0 r}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho r dr}{\varepsilon_0}=\frac{\rho}{2\varepsilon_0}(R_2^2-R_1^2).$$



（第8题图）

9. 电荷的分布具有球对称性，则电场在空间的分布也具有球对称性。

（1）在球体内作一半径为r的球面S_1为高斯面，包围的电荷：$\int_0^r\rho_0(1-\dfrac{r}{R})\cdot 4\pi r^2dr$，由高斯定理：

$$r<R,\quad \oint_{S_1}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r\rho_0(1-\frac{r}{R})\cdot 4\pi r^2 dr \Rightarrow E\cdot 4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}4\pi\rho_0 r^3(\frac{1}{3}-\frac{r}{4R}) \Rightarrow E=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho_0(\frac{r}{3}-\frac{r^2}{4R});$$

（2）在球体外作一半径为r的球面S_2为高斯面，包围的电荷：$\int_0^R\rho_0(1-\dfrac{r}{R})\cdot 4\pi r^2dr$，由高斯定理：

$$r>R,\quad \oint_{S_2}\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R\rho_0(1-\frac{r}{R})\cdot 4\pi r^2 dr \Rightarrow E\cdot 4\pi r^2=\frac{1}{\varepsilon_0}4\pi\rho_0\frac{R^3}{12} \Rightarrow E=\frac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r^2};$$

$$\Rightarrow \text{电场强度在空间的分布：} E=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_0(\dfrac{r}{3}-\dfrac{r^2}{4R}) & (r\le R)\\ \dfrac{\rho_0R^3}{12\varepsilon_0 r^2} & (r>R)\end{cases},$$

在球体外，电场强度随半径r增大而减小，场强递减，则球体外场强最大为：$\dfrac{\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 R^2}=\dfrac{\rho_0 R}{12\varepsilon_0}$；

在球体内，由$\dfrac{dE}{dr}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_0(\dfrac{1}{3}-\dfrac{r}{2R})=0$，$\Rightarrow$ 电场强度在$r=\dfrac{2}{3}R$取极值，

又由$\dfrac{d^2E}{dr^2}=-\dfrac{\rho_0}{\varepsilon_0}\dfrac{r}{2R}<0$，$\Rightarrow$电场强度在$r=\dfrac{2}{3}R$取极大值，球体内场强最大：$\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho_0[\dfrac{\frac{2}{3}R}{3}-\dfrac{(\frac{2}{3}R)^2}{4R}]=\dfrac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}$；

$\Rightarrow$ **电场强度在$r=\dfrac{2}{3}R$处有极大值，场强极大值为：**$E_{\max}=\dfrac{\rho_0 R}{9\varepsilon_0}>\dfrac{\rho_0 R}{12\varepsilon_0}$.

